

4 Propiedades Lenguajes Regulares

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

- 1 Propiedades de cerradura
- 2 Preguntas elementales sobre Lenguajes Regulares
- 3 Identificación de Lenguajes No Regulares
- 4 Ejercicios

Teorema 1

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo son $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, L_1L_2 , $\overline{L_1}$ y L_1^ .*

Teorema 1

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo son $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, L_1L_2 , $\overline{L_1}$ y L_1^ .*

Demostración: Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, entonces existen expresiones regulares r_1 y r_2 tales que $L_1 = L(r_1)$ y $L_2 = L(r_2)$. Por definición $r_1 + r_2$, r_1r_2 y r_1^* son expresiones regulares que respectivamente denotan a los lenguajes $L_1 \cup L_2$, L_1L_2 y L_1^* . Así, la cerradura sobre la unión, concatenación y cerradura estrella es inmediata.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD que acepta L_1 . Entonces el AFD

$$\widehat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

acepta $\overline{L_1}$.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD que acepta L_1 . Entonces el AFD

$$\widehat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

acepta $\overline{L_1}$. Recuerde que en la definición de un AFD la función δ^* es una función total, así $\delta^*(q_0, w)$ está definida para toda $w \in \Sigma^*$. En consecuencia, si $\delta^*(q_0, w) \in F$ entonces $w \in L_1$, en otro caso $\delta^*(q_0, w) \in Q - F$ por lo tanto $w \in \overline{L_1}$.

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

$\widehat{\delta}((q_i, p_j), a) = (q_k, p_l)$, siempre que

$$\delta_1(q_i, a) = q_k \text{ y}$$

$$\delta_2(p_j, a) = p_l.$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

$\widehat{\delta}((q_i, p_j), a) = (q_k, p_l)$, siempre que

$$\delta_1(q_i, a) = q_k \text{ y}$$

$$\delta_2(p_j, a) = p_l.$$

$(q_i, p_j) \in \widehat{F}$ si y sólo si $q_i \in F_1$ y $p_j \in F_2$

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

$$\delta_1^*(q_0, w) \in F_1 \text{ y } \delta_2^*(p_0, w) \in F_2 \Leftrightarrow$$

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

$$\delta_1^*(q_0, w) \in F_1 \text{ y } \delta_2^*(p_0, w) \in F_2 \Leftrightarrow$$

$$\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$$

Tenemos diferentes maneras de describir Lenguajes Regulares:

- descripciones verbales informales,
- notación de conjuntos,
- autómatas finitos,
- expresiones regulares y
- gramáticas regulares.

Tenemos diferentes maneras de describir Lenguajes Regulares:

- descripciones verbales informales,
- notación de conjuntos,
- autómatas finitos,
- expresiones regulares y
- gramáticas regulares.

Definición 2

Un lenguaje regular está dado en una **representación estándar** si y sólo si se describe mediante un autómata finito, una expresión regular o una gramática regular.

Teorema 3

Dada una representación estándar de cualquier lenguaje regular L sobre Σ y cualquier $w \in \Sigma^$, existe un algoritmo para determinar si o no $w \in L$.*

Teorema 3

Dada una representación estándar de cualquier lenguaje regular L sobre Σ y cualquier $w \in \Sigma^$, existe un algoritmo para determinar si o no $w \in L$.*

Demostración: Representamos el lenguaje por algún AFD, luego vemos si $\delta^*(q_0, w) \in F$.

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Demostración: La respuesta es aparente si representamos el lenguaje como un grafo de un AFD. Si hay un camino del vértice inicial a cualquier vértice final, entonces el lenguaje no es vacío.

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Demostración: La respuesta es aparente si representamos el lenguaje como un grafo de un AFD. Si hay un camino del vértice inicial a cualquier vértice final, entonces el lenguaje no es vacío.

Para ver si el lenguaje es finito o infinito, encuentre todos los vértices que son la base de algún ciclo. Si esa base es parte de un camino desde el vértice inicial a algún vértice final, entonces el lenguaje es infinito, de otra manera es finito.

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2 , existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2 , existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Demostración: Usando L_1 y L_2 defina el lenguaje

$$L_3 = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2).$$

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2 , existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Demostración: Usando L_1 y L_2 defina el lenguaje

$$L_3 = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2).$$

Por las propiedades de cerradura L_3 es regular y podemos construir un AFD M que lo acepte. Luego podemos usar el algoritmo del Teorema (4) para determinar si L_3 es vacío. Recuerde de teoría de conjuntos que $L_3 = \emptyset$ si y sólo si $L_1 = L_2$.

Observación 6

Si ponemos n objetos en m cajas (casillas) y si $n > m$, entonces al menos una caja contendrá más de un objeto.

Ejemplo de un lenguaje que no es regular I

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

Ejemplo de un lenguaje que no es regular I

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.

Suponga que L es regular, entonces existe un AFD

$M = (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ que lo reconoce.

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.

Suponga que L es regular, entonces existe un AFD

$M = (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ que lo reconoce.

Considere $\delta^*(q_0, a^i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots$. Ya que hay un número ilimitado de i s, pero sólo un número finito de estados en M , el principio de las casillas nos dice que debe haber un estado, digamos q , tal que

$$\delta^*(q_0, a^n) = q$$

y

$$\delta^*(q_0, a^m) = q$$

con $n \neq m$.

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Así podemos concluir que

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, a^m b^n) &= \delta^*(\delta^*(q_0, a^m), b^n) \\ &= \delta^*(q, b^n) \\ &= q_f.\end{aligned}$$

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Así podemos concluir que

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, a^m b^n) &= \delta^*(\delta^*(q_0, a^m), b^n) \\ &= \delta^*(q, b^n) \\ &= q_f.\end{aligned}$$

Esto contradice la suposición original de que M acepta $a^m b^n$ sólo si $n = m$, con lo cual podemos concluir que L no puede ser regular.

Consideraciones sobre grafos de transición

- Si el grafo de transición no tiene ciclos, el lenguaje es finito y por tanto regular.

- Si el grafo de transición tiene un ciclo con una etiqueta no vacía, el lenguaje es infinito. Recíprocamente, todo lenguaje regular infinito tiene un AFD con un ciclo.

- Si hay un ciclo, este ciclo puede ser pasado por alto o repetido un número arbitrario de veces. Así, si el ciclo tiene etiqueta v y la cadena w_1vw_2 está en el lenguaje, entonces también deben estar las cadenas w_1w_2 , w_1vw_2 , w_1vvw_2 , w_1vvvw_2 y así sucesivamente.

- No sabemos donde está el ciclo en el AFD, pero si el AFD tiene m estados, se debe entrar al ciclo en el momento que se lean m símbolos.

Teorema 8

Sea L un lenguaje regular infinito. Entonces existe algún entero positivo m tal que cualquier $w \in L$ con $|w| \geq m$ se puede descomponer como

$$w = xyz, |xy| \leq m, |y| \geq 1$$

tal que

$$w_i = xy^i z \tag{1}$$

también está en L para todo $i = 0, 1, 2, \dots$.

Observación 9

Toda cadena en L suficientemente larga se puede partir en tres partes de tal manera que un número arbitrario de repeticiones de la parte de en medio produce otra cadena en L . Decimos que la cadena de en medio se “bombea”, de aquí el nombre del lema.

Lema de bombeo demostración I

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Considere el conjunto de estados por los que pasa el autómata al procesar w , digamos que

$$q_0, q_i, q_j, \dots, q_f.$$

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Considere el conjunto de estados por los que pasa el autómata al procesar w , digamos que

$$q_0, q_i, q_j, \dots, q_f.$$

Ya que esta secuencia tiene exactamente $|w| + 1$ miembros, al menos uno debe estar repetido y tal repetición no debe iniciar después del n -ésimo movimiento.

Lema de bombeo demostración II

Así, la secuencia se debe ver como

$$q_0, q_i, q_j, \dots, q_r, \dots, q_r, \dots, q_f,$$

indicando que deben existir subcadenas x, y, z de w tales que

$$\delta^*(q_0, x) = q_r,$$

$$\delta^*(q_r, y) = q_r,$$

$$\delta^*(q_r, z) = q_f,$$

con $|xy| \leq n + 1 = m, |y| \geq 1$.

Lema de bombeo demostración II

Así, la secuencia se debe ver como

$$q_0, q_i, q_j, \dots, q_r, \dots, q_r, \dots, q_f,$$

indicando que deben existir subcadenas x, y, z de w tales que

$$\delta^*(q_0, x) = q_r,$$

$$\delta^*(q_r, y) = q_r,$$

$$\delta^*(q_r, z) = q_f,$$

con $|xy| \leq n + 1 = m$, $|y| \geq 1$. De aquí se sigue inmediatamente que

$$\delta^*(q_0, xz) = q_f,$$

así como

$$\delta^*(q_0, xyz) = q_f,$$

$$\delta^*(q_0, xy^2z) = q_f,$$

$$\delta^*(q_0, xy^3z) = q_f,$$

y así sucesivamente, completando la prueba del teorema.

Ejemplo 10

Use el lema de bombeo para demostrar que $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Asuma que L es regular, por lo tanto se debe cumplir el lema de bombeo. No conocemos el valor de m , sea el que fuere, podemos elegir $n = m$. Por lo tanto la subcadena y debe consistir de as .

Ejemplo 10

Use el lema de bombeo para demostrar que $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Asuma que L es regular, por lo tanto se debe cumplir el lema de bombeo. No conocemos el valor de m , sea el que fuere, podemos elegir $n = m$. Por lo tanto la subcadena y debe consistir de as . Suponga que $|y| = k$. Entonces la cadena obtenida usando $i = 0$ en la ecuación ($w_i = xy^i z$) es

$$w_0 = a^{m-k} b^m$$

que claramente no está en L . Esto contradice el lema de bombeo y por lo tanto indica que es falsa la suposición de que L es regular.

- Tenemos la garantía de que existe un m y la descomposición xyz , pero no sabemos quiénes son.

- Tenemos la garantía de que existe un m y la descomposición xyz , pero no sabemos quiénes son.
- No podemos pretender que hemos alcanzado una contradicción sólo porque el lema de bombeo es violado para algunos valores específicos de m o xyz .

- Tenemos la garantía de que existe un m y la descomposición xyz , pero no sabemos quiénes son.
- No podemos pretender que hemos alcanzado una contradicción sólo porque el lema de bombeo es violado para algunos valores específicos de m o xyz .
- Por otro lado, el lema de bombeo se cumple para todo $w \in L$ y todo i . Por lo tanto, si el lema de bombeo es violado por una w o una i , entonces el lenguaje no puede ser regular.

El juego de bombeo

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustrar nuestro intento.

- 1 El oponente escoge m .

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustrar nuestro intento.

- 1 El oponente escoge m .
- 2 Dado m , escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m .
Tenemos la libertad de escoger cualquier w , garantizando que $|w| \geq m$.

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustrar nuestro intento.

- 1 El oponente escoge m .
- 2 Dado m , escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m . Tenemos la libertad de escoger cualquier w , garantizando que $|w| \geq m$.
- 3 El oponente elige la descomposición xyz , sujeto a que $|xy| \leq m, |y| \geq 1$. Tenemos que asumir que el oponente hace la elección que nos hará más difícil ganar el juego.

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustrar nuestro intento.

- 1 El oponente escoge m .
- 2 Dado m , escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m . Tenemos la libertad de escoger cualquier w , garantizando que $|w| \geq m$.
- 3 El oponente elige la descomposición xyz , sujeto a que $|xy| \leq m, |y| \geq 1$. Tenemos que asumir que el oponente hace la elección que nos hará más difícil ganar el juego.
- 4 Tratamos de elegir i de tal manera que la cadena bombeada w_i , definida por la ecuación $w_i = xy^iz$, no esté en L , si lo logramos ganamos el juego.

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguaje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m . Como tenemos completa libertad para elegir w , escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m , al oponente no le queda más que escoger una y con puras a s, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguaje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m . Como tenemos completa libertad para elegir w , escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m , al oponente no le queda más que escoger una y con puras a s, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Así tendríamos que $x = a^{m-k}$, $y = a^k$, $z = b^{m+1}$, usando la ecuación ($w_i = xy^i z$) y bombeando con $i = 2$ obtenemos:

$$w_2 = a^{m-k} a^{2k} b^{m+1} = a^{m+k} b^{m+1}$$

que no está en L .

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguaje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m . Como tenemos completa libertad para elegir w , escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m , al oponente no le queda más que escoger una y con puras a s, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Así tendríamos que $x = a^{m-k}$, $y = a^k$, $z = b^{m+1}$, usando la ecuación ($w_i = xy^i z$) y bombeando con $i = 2$ obtenemos:

$$w_2 = a^{m-k} a^{2k} b^{m+1} = a^{m+k} b^{m+1}$$

que no está en L . Por lo tanto se viola el lema de bombeo y así L no es regular, es decir, ganamos el juego.

Los ejercicios los deben enviar en pdf a jlavallentor@gmail.com, pueden usar cualquier herramienta (de preferencia \LaTeX), en el peor de los casos, si no tienen alternativa, lo hacen con papel y lapiz con letra legible y visible, lo escanean y me lo envían en pdf.

- 1 Demuestre como a partir de un AFD para L se puede construir un autómata finito para \bar{L}^* (la cerradura estrella del complemento de L).
- 2 La **diferencia simétrica** de dos conjuntos S_1 y S_2 está definida como

$$S_1 \ominus S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ o } x \in S_2, \text{ pero } x \text{ no está ni en } S_1 \text{ ni en } S_2\}.$$

Demuestre que la familia de lenguajes regulares es cerrada bajo la diferencia simétrica.

- 3 Demuestre que los siguientes lenguajes no son regulares
 - 1 $L = \{a^n b^k c^n : n \geq 0, k \geq 0\}$,
 - 2 $L = \{a^n b^k c^n : n \geq 0, k \geq n\}$,
 - 3 $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$.